ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti*, Cl. di Scienze — Vol. LXXVII. Fasc. II — 1943-44.

INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI PUNTUALI REGOLARI DEI RAMI SUPERLINEARI ORDINARII DELLE CURVE ALGEBRICHE PIANE

Nota del dott. Carlo Felice Manara

ULRICO HOEPLI
Libraio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1943 - 44

INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI PUNTUALI REGOLARI DEI RAMI SUPERLINEARI ORDINARII DELLE CURVE ALGEBRICHE PIANE

Nota del dott. CARLO FELICE MANARA

(presentata dal M. E. Oscar Chisini il 2 maggio 1944)

Sunto. — Si dimostra che i rami superlineari, di ordine maggiore di 3, delle curve algebriche piane posseggono degli invarianti per trasformazioni puntuali regolari, invarianti che sono in numero finito ; ci si limita per ora a trattare il caso dei rami di classe 1. Si deducono alcune proposizioni relative alla trasformabilità di due tali rami uno nell'altro.

§ 1. - In una mia ricerca, in corso di elaborazione, sui piani multipli mi si é presentato il problema di ridurre ad alcuni tipi fissi i rami superlineari delle curve algebriche piane, con particolare riguardo ai rami di classe 1 (ordinarii). Nei tentativi di risoluzione del problema propostomi sono venuti alla luce alcuni risultati sui rami superlineari d'ordine > 3 [1]. I risultati sono i seguenti :

1°) I rami superlineari ordinarii di ordine 4 posseggono un invariante relativo di fronte alle trasformazioni puntuali re-

---

[1] Lo studio projettivo degli elementi differenziali *non regolari* è in gran parte ancora da farsi. Per elementi differenziali non regolari s'intendono quelli che pur appartenendo a rami lineari presentano nel loro centro un flesso (ordinario o di specie superiore) o un punto sestattico o altre singolarità E sono pure elementi non regolari quelli appartenenti a rami *non lineari*.

Il prof. VILLA mi comunica che il prof. BOMPIANI, in un corso di Dispense litografate (dal titolo : Geometria projettiva differenziale, Roma 1942), al quale non venne data alcuna diffusione nel campo scientifico, espone risultati nuovi, fra cui appunto lo studio dei primi casi degli elementi non regolari : elementi di flesso di specie superiore, elementi cuspidali.

golari (dette anche brevemente puntuali), ossia si può formare con i coefficienti dello sviluppo in serie di Puiseux di un tale ramo un'espressione che o rimane invariata o al massimo viene moltiplicata per una costante quando si sottoponga il ramo stesso ad una trasformazione regolare.

2°) I rami superlineari ordinarii di ordine maggiore di 4 ammettono almeno due invarianti relativi e quindi almeno un invariante assoluto, costruito con essi.

3°) Perchè due rami ordinarii dello stesso ordine n siano trasformabili uno nell'altro mediante una trasformazione regolare, è sufficiente che i loro sviluppi coincidano fino ad un termine ben determinato, dipendente da n.

Darò nei seguenti §§ la dimostrazione delle proposizioni che ho enunciate, traendone le conseguenze immediate che mi sembrano più notevoli ([2]).

§ 2. - Sia dato un ramo superlineare γ del IV ordine di classe 1 (ordinario); assumendo, come è sempre lecito, la tangente a γ come asse delle x, il ramo γ viene rappresentato da una serie di Puiseux del tipo

$$(1)\qquad y = a_1 x^{1+\frac{1}{4}} + a_2 x^{1+\frac{2}{4}} + a_3 x^{1+\frac{3}{4}} + \ldots\ldots \quad \text{con } a_1 \neq 0 .$$

Sottoponiamo γ ad una trasformazione puntuale regolare che lasci ferma la direzione della tangente a γ stesso nella sua origine. Le formule di tale trasformazione saranno date da

$$(2)\qquad \begin{cases} X = a_{10} x + a_{01} y + a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2 + \ldots \\ Y = \qquad\quad b_{01} y + b_{20} x^2 + b_{11} xy + b_{02} y^2 + \ldots \end{cases} \quad \text{con } a_{10} \neq 0 \text{ e } b_{01} \neq 0 .$$

Sussiste il seguente

Teorema I. - Quando si sottopone γ ad una trasformazione del tipo (2) l'espressione

$$(3)\qquad \mathrm{I} = 11\, a_2{}^2 - 10\, a_1\, a_3 ,$$

rimane invariata o al più si riproduce moltiplicata per una costante che dipende solo dalla trasformazione.

([2]) Nei nostri discorsi consideriamo essenzialmente rami di curve algebriche ma le conclusioni valgono ovviamente per qualunque ramo, poichè nel campo differenziale ogni ramo può essere sostituito da una curva algebrica convenientemente approssimante.

Per dimostrare questo teorema osserviamo anzitutto che una trasformazione del tipo (2) si può sempre ottenere mediante l'applicazione successiva di una opportuna trasformazione del tipo

$$(4) \qquad \begin{cases} X = x + \alpha_{20} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{02} y^2 + \dots \\ Y = y + \beta_{20} x^2 + \beta_{11} xy + \beta_{02} y^2 + \dots \end{cases}$$

e della proiettività

$$(5) \qquad \begin{cases} X = a_{10} x + a_{01} y \\ Y = \qquad\quad b_{01} y \end{cases}$$

ed a sua volta la proiettività (5) si può ottenere come prodotto di proiettività elementari dei tipi

$$(6) \begin{cases} X = x + h y \\ Y = \qquad y \end{cases} \qquad (7) \begin{cases} X = x \\ Y = b y \end{cases} \qquad (8) \begin{cases} X = a x \\ Y = y \end{cases}$$

Basterà quindi provare il teorema per le trasformazioni dei tipi (4), (6), (7), (8).

Ora per le trasformazioni del tipo (7) l'espressione I viene moltiplicata per b^2, mentre per quelle del tipo (8) viene moltiplicata per a^{-3}. Rimane a provare il teorema per le trasformazioni dei tipi (4) e (6). Conviene a tal fine scrivere il ramo γ in forma parametrica ponendo

$$(9) \qquad \begin{cases} x = t^4 \\ y = a_1 t^{4+1} + a_2 t^{4+2} + a_3 t^{4+3} + \dots \end{cases}$$

Sostituendo nelle (4) per le (9) si ottiene

$$(10) \qquad \begin{cases} X = t^4 \qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{20} t^8 + \dots \\ Y = a_1 t^5 + a_2 t^6 + a_3 t^7 + \dots \end{cases}$$

Si pone poi $X = T^4$ con il che risulta

$$(11) \qquad T = t + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^3 + \dots ;$$

si inverte la serie (11) e si sostituisce nella seconda delle (10) ottenendo l'espressione di Y in serie di potenze di T con dei coefficienti A_i che coincidono con gli a_i fino ad a_3 incluso.

Per le trasformazioni del tipo (6) il procedimento dimostrativo è perfettamente analogo a quello che ci è servito nel caso delle trasformazioni del tipo (4). Ci dispensiamo dal riprodurre nei loro particolari i calcoli, un poco più laboriosi, che dànno i coefficienti A_i della serie che rappresenta Y.

Rimane dunque completamente dimostrato il nostro teorema. Come conseguenza immediata di esso possiamo enunciare il seguente

Corollario - I rami superlineari ordinarii di ordine 4 si dividono in due classi : quelli per cui $I = 0$ e quelli per cui $I \neq 0$ e non è possibile trasformare un ramo di una classe in uno dell'altra con trasformazioni regolari. In particolare non è possibile ridurre un ramo qualunque al tipo semplice

$$y^4 = x^5 .$$

§ 3. - Per i rami di ordine maggiore di 4 mi limiterò a trattare il caso dei rami del V ordine, caso che d'altronde è del tutto caratteristico.

Dato un tale ramo

$$y = a_1 x^{1+\frac{1}{5}} + a_2 x^{1+\frac{2}{5}} + a_3 x^{1+\frac{3}{5}} + a_4 x^{1+\frac{4}{5}} + \ldots \quad \text{con } a_1 \neq 0 \tag{12}$$

possiamo ripetere in modo perfettamente analogo i ragionamenti fatti nel caso precedente. La sola differenza è che ora si dànno due espressioni invarianti relative

$$J = 13\, a_2^2 - 12\, a_1 a_3 ; \tag{13}$$

$$K = 27\, a_1^2 a_4 - 63\, a_1 a_2 a_3 + 35\, a_2^3 . \tag{14}$$

Ora per trasformazioni del tipo (7) la J e la K vengono moltiplicate rispettivamente per b^2 e b^3, mentre per trasformazioni del tipo (8) vengono moltiplicate rispettivamente per $a^{-\frac{14}{5}}$ ed $a^{-\frac{21}{5}}$. È quindi immediato il seguente

Teorema II - L'espressione

$$U = J^3 / K^2 \tag{15}$$

è un invariante assoluto del ramo (12) per trasformazioni del tipo (2).

Analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso precedente possiamo anche qui far seguire al teorema il

Corollario - Condizione necessaria perchè due rami superlineari ordinarii del V ordine siano trasformabili uno nell'altro è l'uguaglianza dei rispettivi invarianti U.

§ 4. - Dimostriamo ora il terzo fatto enunciato al § 1. Siano dati due rami superlineari dello stesso ordine n: un ramo γ dato da

$$y = a_1 x^{1+\frac{1}{n}} + a_2 x^{1+\frac{2}{n}} + \dots \tag{16}$$

ed un ramo Γ dato da

$$Y = A_1 X^{1+\frac{1}{n}} + A_2 X^{1+\frac{2}{n}} + \dots \tag{17}$$

Sussiste il seguente

Teorema III - Se è $a_i = A_i$ per tutti i valori di i da 1 ad $n(n-2)$ escluso, esiste una trasformazione regolare che muta γ in Γ ed è fornita da formule del tipo

$$\begin{cases} X = x \\ Y = F(x, y) \end{cases} \tag{18}$$

dove F indica una funzione analitica delle due variabili x, y regolare nell'intorno del punto $x = 0$, $y = 0$. Per dimostrare il nostro teorema in generale basta evidentemente dimostrare che un ramo γ di tipo fissato, per es. avente tutti nulli i coefficienti da $a_{n(n-2)}$ compreso in avanti, può sempre essere trasformato in un ramo Γ qualunque.

A tal fine poniamo $X = x$; viene così stabilita una corrispondenza biunivoca tra le parallele all'asse y e quelle all'asse Y. Su due parallele corrispondenti i rami γ e Γ determinano n punti ciascuno; ora è sempre possibile determinare Y come funzione razionale intera di grado $n-1$ in y in modo che, quando y prende i valori $y_1, y_2, \dots y_n$ determinati da γ su una parallela all'asse y, Y prenda i valori $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ determinati da Γ sulla corrispondente parallela all'asse Y.

I coefficienti di tale funzione razionale intera sono naturalmente funzioni di x; se si scrivono tali coefficienti servendosi della formula che dà la parabola interpolatrice d'ordine $n-1$ sotto forma di determinante

$$\begin{vmatrix} Y & y^{n-1} & \dots & y^2 & y & 1 \\ Y_1 & y_1^{n-1} & \dots & y_1^2 & y_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_n & y_n^{n-1} & \dots & y_n^2 & y_n & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

si verifica che, nelle ipotesi da noi poste, essi sono funzioni regolari di x.

Eseguiamo i calcoli per il caso particolare di $n = 3$, d'altronde del tutto caratteristico. Sia dunque il ramo γ dato da

$$(20) \qquad y = a_1 x^{1+\frac{1}{3}} + a_2 x^{1+\frac{2}{3}} \qquad \text{con } a_1 \neq 0$$

ed il ramo Γ da

$$(21) \qquad \mathrm{Y} = a_1 \mathrm{X}^{1+\frac{1}{3}} + a_2 \mathrm{X}^{1+\frac{2}{3}} + a_3 \mathrm{X}^{1+\frac{3}{3}} + a_4 \mathrm{X}^{1+\frac{4}{3}} + \ldots$$

Ponendo $\mathrm{X} = x$ e scrivendo le (20) e (21) sotto forma parametrica otterremo

$$\begin{cases} x = \mathrm{X} = t^3 \\ y = a_1 t^4 + a_2 t^5 \\ \mathrm{Y} = y + t^6 (a_3 + a_4 t + a_5 t^2 + \ldots) = y + t^6 \cdot f(t) \end{cases}$$

indicando con f una funzione olomorfa della t.

In questo caso i valori $y_1\, y_2\, y_3$, $\mathrm{Y}_1\, \mathrm{Y}_2\, \mathrm{Y}_3$ sono dati da

$$\begin{cases} y_1 = a_1 t^4 + a_2 t^5 \\ y_2 = \varepsilon a_1 t^4 + \varepsilon^2 a_2 t^5 \\ y_3 = \varepsilon^2 a_1 t^4 + \varepsilon a_2 t^5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{Y}_1 = y_1 + t^6 \cdot f(t) \\ \mathrm{Y}_2 = y_2 + t^6 \cdot f(\varepsilon t) \\ \mathrm{Y}_3 = y_3 + t^6 \cdot f(\varepsilon^2 t) \end{cases}$$

dove si è indicata, come al solito, con ε una radice cubica dell' unità.

Scrivendo per il nostro caso la formula (19) e sviluppando il determinante abbiamo

$$(22) \qquad \mathrm{A}\,\mathrm{Y} + \mathrm{C}_2 y^2 + \mathrm{C}_1 y + \mathrm{C}_0 = 0$$

dove A, C_2, C_1, C_0 sono funzioni di t^3, ossia di x, di cui importa esaminare il comportamento per x che tende a zero.

Eseguendo i calcoli si trova

$$\begin{cases} \mathrm{A} = k_1 t^{12} + k_2 t^{15} + \ldots = k_1 x^4 + k_2 x^5 + \ldots \\ \mathrm{C}_2 = h_1 t^{12} + h_2 t^{15} + \ldots = h_1 x^4 + h_2 x^5 + \ldots \\ \mathrm{C}_1 = m_1 t^{12} + m_2 t^{15} + \ldots = m_1 x^4 + m_2 x^5 + \ldots \\ \mathrm{C}_0 = \qquad n_1 t^{18} + \ldots = \qquad n_1 x^6 + \ldots \end{cases}$$

dove per evidenti ragioni di simmetria, la t compare solo ad esponenti multipli di 3, e dove $k_1\; k_2$, $h_1\; h_2$, $m_1\; m_2$, n_1, sono costanti che non ci interessa determinare: importante è solo il fatto che tanto k_1 che m_1 sono certamente diversi da zero. Se ora dalla (22) ricaviamo Y otteniamo

$$Y = B_2 y^2 + B_1 y + B_0$$

dove $B_i = - C_i / A$ e, per i risultati dei nostri calcoli, le B_i sono funzioni regolari di x nell'intorno dello zero e tali che, tendendo x a zero, B_0 tende a zero e B_1 ad un limite finito certamente diverso da zero.

Considerazioni perfettamente analoghe, con la sola differenza, della grande laboriosità dei calcoli, si possono fare per ogni valore di n. Ne segue che, per il caso dei rami γ e Γ che abbiamo considerati, le formule della trasformazione (18) sono date da

$$\begin{cases} X = x \\ Y = B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \dots B_{n-1} y^{n-1} . \end{cases}$$

dove $B_0 B_1 \dots B_{n-1}$ sono funzioni regolari della x nell'intorno dello zero e tali che, quando x tende a zero, B_0 tende a zero e B_1 ad un limite non nullo.

Da questo teorema possiamo trarre immediatamente il seguente

Corollario - Un ramo superlineare ordinario possiede un numero finito di invarianti per trasformazioni regolari.

§ 5. - Rimarrebbe il problema di determinare la trasformazione regolare che muti uno nell'altro due rami del IV ordine nell'ipotesi, presumibilmente vera, che due tali rami, appartenenti alla stessa classe, si possano sempre trasformare uno nell'altro, ossia che l'essere per due rami contemporaneamente $I = 0$ oppure $I \neq 0$ sia condizione non solo necessaria ma anche sufficiente per l'esistenza di una trasformazione che li muti uno nell'altro.

Analogo problema rimane per il caso di due rami del V ordine nell'ipotesi, anch'essa presumibilmente vera, che per due rami l'uguaglianza dei relativi invarianti U sia condizione non solo necessaria ma anche sufficiente per l'esistenza dl una trasformazione regolare che li muti uno nell'altro.

Mi riprometto di ritornare sull'argomento per precisare questi punti e per esaminare più particolarmente i casi dati dai valori dell'ordine maggiori di 4 e 5.

Estratto dai *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo di scienze e lettere
Vol. LXXVII, 8° della Serie III, Fasc. II.

PAVIA — PREMIATA TIPOGRAFIA SUCCESSORI FUSI — 1944

Premiata Tipografia Successori FUSI — Pavia, Via L. Spallanzani 11 - 1944